This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

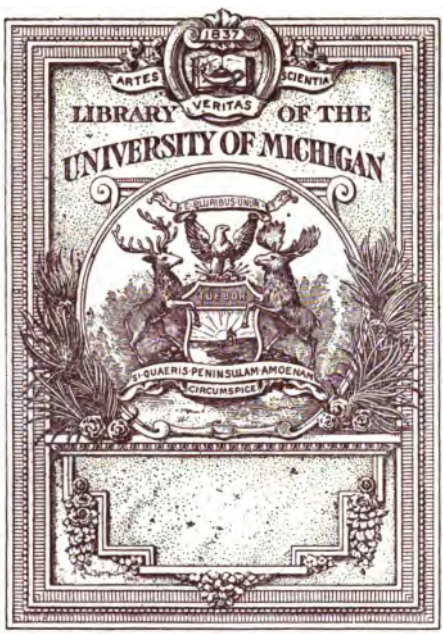
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
Prof. Alex. Zivet.

1672
8981
Alexander Ziwet
QA
905
.H13

Theoretische Untersuchungen

auf dem

Gebiete der Hydrostatik

Inaugural-Dissertation

vorgelegt

der hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Zürich

von

Hermann Haedicke
aus Brandenburg a/H.

ZÜRICH
Druck von Orell Füssli & Co.
1881

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13 1906

Seiner verehrten Tante

Fräulein CAROLINE *TORGES*

dankbar gewidmet

von

HERMANN HÆDICKE.

18 May 10 N.E.N

Inhalt.

		Seite.
Cap. I.	Vom Gleichgewicht der Kräfte in der Ebene (Einleitung)	1—15
Cap. II.	Die Resultante der Widerstände nachgiebiger Medien und ihr Angriffspunkt	16—21
Cap. III.	Literarische Rundschau auf dem Gebiete des hydr. Auftriebes	22—42

Bouguer	S. 22	Russel	S. 34
Euler	23	Nystrom	34
Chapmann	26	Rankine	35
Poisson	26	Bischoff	37
Duhamel	29	Leitfaden für Schiffbau	37
James Peake	31	Leitfaden für Naturlehre	37
Mielichhofer	31	Fishbourne	38
Weissbach	32	Bertin	39
		White 40	

Cap. IV.	Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebes schwimmender Körper	43—47
Cap. V.	Der Angriffspunkt des hydr. Abtriebes untergetauchter Körper	48—49
Cap. VI.	Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebes untergetauchter Körper (Allgemeiner Fall.)	50—57
	Thesen	59

170835

Cap. I.

Einleitung.

Vom Gleichgewichtspunkt der Kräfte in der Ebene.

Die constructive Vereinigung zweier Kräfte der Ebene führt auf eine Kraft und eine Gerade, in welcher diese letztere angebracht werden muss, um die gegebenen Kräfte zum Gleichgewicht zu bringen. Wir nennen diese Kraft die *Resultante* der gegebenen Kräfte, und jene Gerade die *Richtungslinie* derselben.

Die Annahme der *Angriffspunkte* ist bei den Problemen dieser Art nur an die Richtungslinie der Kräfte gebunden, sonst absolut willkürlich und es erscheint auch die Resultante je nach dem angewendeten Verfahren in irgend einem Punkte ihrer Richtungslinie.

Man befolgt daher bei den betreffenden Constructionen den Grundsatz: «Man kann eine Kraft nach einem beliebigen Punkt ihrer Richtung verlegen, sobald man denselben mit dem ursprünglichen Angriffspunkt fest verbunden denkt.»

Sind z. B. die beiden Punkte a und b die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2, so kann man folgende Methoden zur Construction der Resultante und ihrer Richtungslinie anwenden:

1. (Fig. 1) Verlege beide nach dem Schnittpunkt ihrer Richtungen (p_1) und vereinige sie dort nach dem Grundsatz vom

Parallelogramm der Kräfte. Die Resultante R erscheint dann in p_1.

2. (Fig. 2) Liegt der Schnittpunkt der Kraftrichtungen nicht auf der Tafelebene, so setzt man zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P' und P'' in der Richtungslinie a—b an, vereint P' mit P_1 und P'' mit P_2 zu R_1 und R_2 und sucht nach (1) die Resultante von R_1 und R_2 welche (R) im Punkte p_2 erscheint. — Man sieht, dass die Lage von p_2 abhängig ist von der Annahme der Grösse der Hülfskräfte P' und P''.

3. (Fig. 3) Steht auch der hier verwendete Theil der Tafelebene nicht zur Disposition, so kann man die Kräfte P' und P'' auch nach innen gerichtet ansetzen. Die Resultante erscheint dann nach einer sonst analogen Construction in p'_2, welcher Punkt wiederum mit der Annahme der Grösse der Hülfskräfte variirt.

4. (Fig. 4) Da der Winkel der Richtungslinie der Resultante durch die Lage der Letztern bestimmt wird, ein Punkt derselben aber in dem Schnittpunkt p_1 der gegebenen Kraftrichtungen fixirt ist, so kann man R einfach mit Hülfe des Kräftedreiecks bestimmen und durch p_1 eine Parallele zu R ziehen. Das Kräftedreieck nimmt entweder die Form der Fig. 4 an, wenn P_1 an P_2 angetragen wird, oder die der Fig. 5, wenn man P_2 als Grundlage betrachtet. Beide Kräftedreiecke zusammen geben das Parallelogramm.

Die Pfeilrichtung im Kräftedreieck ist bekanntlich für alle drei Kräfte gleichsinnig zu nehmen, wenn man als Resultante diejenige Kraft ansieht, welche im Stande ist, die Componenten aufzuheben, oder, mit andern Worten, wenn die drei Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

5. Will man den Rechnungsweg verfolgen, so kann man jede Kraft unter Annahme eines beliebigen rechtwinkligen Coor-

dinatensystems in ihre Componenten zerlegen, diese unter Hinzufügung der betreffenden Kräftepaare in die Achsen verlegen, und erhält so (Fig. 6) in der X-Achse:

$$X = \Sigma (P \cos \alpha)$$

in der Y-Achse:

$$Y = \Sigma (P \sin \alpha)$$

und ausserdem die Momente

$$\Sigma (y\, P \cos \alpha) \text{ und } \Sigma (x\, P \sin \alpha)$$

Das erste Moment lässt sich nun mit der Kraft X zu einer neuen Kraft vereinen, welche parallel der Ascissenaxe in einem Abstande η verläuft, so dass

$$\eta \Sigma (P \cos \alpha) = \Sigma (y \,.\, P \cos \alpha)$$

$$\eta = \frac{\Sigma (y\, P \cos \alpha)}{\Sigma (P \cos \alpha)}$$

und ebenso gibt die Vereinigung des letztgenannten Momentes mit der Kraft Y eine solche parallel der Ordinatenachse, und zwar in einem Abstande:

$$\xi = \frac{\Sigma (x\, P \sin \alpha)}{\Sigma (P \sin \alpha)}$$

Vereinigt man nunmehr X und Y im Punkte ξ, η, so erhält man die Resultante

$$R = \sqrt{\Sigma^2 (P \sin \alpha) + \Sigma^2 (P \cos \alpha)}$$

und den Neigungswinkel der Richtung derselben gegen die Abscissenachse:

$$tg\, \varphi = \frac{\Sigma (P \sin \alpha)}{\Sigma (P \cos \alpha)}$$

Hierdurch ist die Grösse und Richtung der Resultante, sowie der Ort eines Punktes bestimmt, durch welchen die Richtungslinie derselben gehen muss. Die letztgenannten beiden Grössen kann man noch zu einer Gleichung für die Richtungslinie zusammenfassen:

$$y - \eta = tg\, \varphi\, (x - \xi)$$

oder durch Einsetzen der Werthe:

$$y - \frac{\Sigma(y\,P\cos\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)} = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)}\left(x - \frac{\Sigma(x\,P\sin\alpha)}{\Sigma(P\sin\alpha)}\right)$$

Liegen die Kräfte im Raum, und sind die Coordinaten ihrer Angriffspunkte x, y, z, die Winkel ihrer Richtungen mit der xy Ebene $= \alpha$, die ihrer Projection auf die xy Ebene mit der x Achse $= \beta$, so ergiebt das gleiche Verfahren:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

wo

$$X = \Sigma(P\cos\alpha\cos\beta)$$
$$Y = \Sigma(P\cos\alpha\sin\beta)$$
$$Z = \Sigma(P\sin\alpha)$$

ferner

$$tg\,\varphi = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)}$$

$$tg\,\psi = \frac{\Sigma(P\cos\alpha\sin\beta)}{\Sigma(P\cos\alpha\cos\beta)}$$

wenn φ die Resultante mit dem Winkel α der Kraftrichtungen und ψ mit β correspondirt, und endlich ist der Punkt, durch welchen die Richtungslinie der Resultante gehen muss, ausgedrückt durch die Coordinaten:

$$\xi = \frac{\Sigma(x\,P\sin\alpha\cos\beta)}{\Sigma(P\sin\alpha\cos\beta)}$$

$$\eta = \frac{\Sigma(y\,P\cos\alpha\cos\beta)}{\Sigma(P\cos\alpha\cos\beta)}$$

$$\zeta = \frac{\Sigma(z\,P\sin\alpha\cos\beta)}{\Sigma(P\sin\alpha\cos\beta)}$$

Die volle Vereinigung mehrerer Kräfte im Raume gelingt bekanntlich nur dann, wenn nicht noch ein Kräftepaar restirt, welches nicht in der Ebene der Resultante liegt.

Die sämmtlichen bisher besprochenen Lösungen ergeben, wie wir gesehen, nur die *Grösse* und *Richtungslinie* der Resultante, und führen überall da zum Ziel, wo ein augenblicklicher Gleichgewichtszustand hergestellt werden soll.

Es gibt jedoch eine grosse Reihe von Problemen, bei denen die Kräfte an bestimmte Angriffspunkte fixirt sind und es darauf ankommt, einen Punkt zu finden, in welchem man die Resultante angreifen lassen muss, um auch dann Gleichgewicht zu erhalten, wenn das ganze, durch starre Verbindung der Anhaltspunkte erhaltene System unter Beibehaltung der Kraftrichtungen drehbar sein soll.

Denken wir uns z. B. (Fig. 7) eine starre Ebene — verkörpert vielleicht durch ein Brett $m\,n\,p\,q\,r\,s$ — welche in den Punkten a, b und c von den Kräften P_1, P_2 und P_3 ergriffen wird. Sollen nun diese Kräfte unter allen Umständen ihre Richtungen bewahren, auch wenn die starre Ebene gedreht wird, so kann man die Frage stellen: «Wo muss der Drehpunkt des Brettes $m\,n\,p\,q\,r\,s$ angebracht werden, damit die Kräfte stets im Gleichgewicht sind, auch wenn dem Brette eine beliebige Drehung um den fraglichen Punkt ertheilt wird.»

Um für eine einzige Lage — also ein augenblickliches — Gleichgewicht zu erzielen, hat man nur nöthig, den Drehpunkt in irgend einem Punkt der nach Obigem bestimmten Richtungslinie der Resultante der drei Kräfte P_1 P_2 und P_3 anzubringen. Die geringste Drehung jedoch wird das Gleichgewicht stören. Unsere Constructionen führen daher hier nicht zum Ziel.

Um dieser Aufgabe näher zu treten, denken wir uns zwei ebene Kräfte P_1 und P_2 in den Punkten a und b angreifend. Wir bestimmen die Richtungslinie der Resultante (Fig. 8) und nehmen in derselben einen Punkt O_1 als Drehpunkt der durch

a, b und c gegebenen (starren) Ebene an. Wir ertheilen dann der letzteren eine Drehung, so dass a nach a_1 und b nach b_1 wandern. Für diese Lage können wir uns die Kräfte P_1 und P_2 durch eine Resultante R in p_1 ersetzt denken, und wir sehen, dass diese Resultante bestrebt sein wird, das System in die frühere Lage zurückzudrehen. Das durch Festhalten der Ebene in dem Punkte O_1 hervorgebrachte Gleichgewicht war mithin ein *stabiles*.

Nehmen wir hingegen den Punkt O_2 (Fig. 9) als Drehpunkt an und lassen a nach a_2 und b nach b_2 wandern, so geht für diese neue Lage die Resultante von P_1 und P_2 durch den Punkt p_2; es entsteht also durch die Drehung ein Moment, welches bestrebt ist, die einmal eingeleitete Drehung noch weiter fortzuführen, und es würde das System erst dann wieder im Gleichgewicht sein, wenn die Drehung um 180° vollführt ist. Das durch Festhalten der Ebene in dem Punkte O_2 erhaltene Gleichgewicht ist also ein *labiles*.

Es müss nun offenbar zwischen O_1 und O_2 ein Punkt O liegen, für welchen das Gleichgewicht weder stabil noch labil, sondern *indifferent* ist. In diesem Punkte O können wir die Ebene festhalten, um für jede beliebige Drehung das Gleichgewicht erhalten zu sehen.

Man nennt diesen Punkt (cfr. die Anm. S. 12) den *Gleichgewichtspunkt* und die durch denselben vertikal zur Ebene gedachte Achse die *Gleichgewichtsachse* des Systems *a-b*.

Der Ort dieses Punktes ergibt sich leicht auf folgende Weise: (Fig. 10)

Bezeichnen wir die von dem Punkte O auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel mit p' resp. p'', so muss nach einer

um den Winkel α ertheilten Drehung, falls das Gleichgewicht dann noch bestehen soll, die Bedingung erfüllt werden:

$$P_1 \, p' = P_2 \, p''$$

oder, da

$$p' = O\,a_1 \cos(\alpha + \varepsilon_1) \qquad p'' = O\,b_1 \cos(\alpha + \varepsilon_2)$$

und

$$O\,a_1 = l_1 \qquad O\,b_1 = l_2:$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2 \cos(\alpha + \varepsilon_2)}{l_1 \cos(\alpha + \varepsilon_1)}$$

Setzen wir nun die Drehung so weit fort, dass $\alpha + \varepsilon_1 = 90^0$, dann geht P_1 durch O; das Moment von P_1 wird gleich O und es muss dann nothwendig auch das von $P_2 = o$ sein, also

$$\alpha + \varepsilon_2 = \alpha + \varepsilon_1 = 90^0$$

oder:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

d. h. *die von dem Gleichgewichtspunkt auf die Kraftrichtungen gefällten Normalen schliessen mit den Grössen l_1 und l_2 gleiche Winkel ein.*

Damit folgt aber sofort:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

d. h. die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte von ihrem Gleichgewichtspunkt verhalten sich umgekehrt wie die anliegenden Kräfte.

Aus $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ folgt ferner:

Der von den Perpendikeln p_1 und p_2 eingeschlossene Winkel ist gleich dem von l_1 und l_2 gebildeten; mithin ergänzen sich die Winkel bei p, O, a und b zu vier Rechten, d. h.:

Die Figur $p\,O\,a\,b$ ist ein Kreisviereck.

Der Punkt O ist also aus P_1, P_2, a und b als der Schnittpunkt der Richtungslinie der Resultante mit dem durch a, b und p gegebenen Kreise construirbar.

Da ferner (Fig. 11) der in dem Kräftedreieck von P_1 und P_2 eingeschlossene Winkel zum Winkel $a\,p\,b$ supplementär ist, so folgt die Gleichheit des ersteren mit dem Winkel $a\,O\,b$ und mit Hülfe der Beziehung

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

die Aehnlichkeit des Dreiecks $a\,O\,b$ mit dem Kräftedreieck. Ist nun $a\,b = s$, so ist

$$\frac{P_1}{R} = \frac{l_2}{s};\ \frac{P_2}{R} = \frac{l_1}{s}$$

oder:

$$l_1 = s\,\frac{P_2}{R};\ l_2 = s\,\frac{P_1}{R}$$

mithin sind die Grössen l_1 und l_2, d. h. die Entfernungen des gesuchten Gleichgewichtspunktes der beiden Kräfte P_1 und P_2 von ihren Angriffspunkten aus s, R, P_1 und P_2 construirbar.

Daraus folgt folgende Methode zum Auffinden von O: (Fig. 12)

Trage P_2 an P_1 und bilde R. Ziehe $v\,u$ parallel P_2, so dass $a\,u = s$. Dann ist $v\,u = l_2$ und $a\,v = l_1$. Schlage um a mit l_1 und um b mit l_2 je einen Kreis, dann ist der Schnittpunkt O der Gleichgewichtspunkt von P_1 und P_2.

Gehen wir nunmehr zu der Aufgabe (Fig. 7) zurück, welche den Anlass zu den vorstehenden Betrachtungen gab, so finden wir offenbar, dass derjenige Punkt, in welchem wir das Brett $m\,n\,p\,q\,r\,s$ drehbar befestigen müssen, um unter Beibehaltung der Grösse und Richtung der dasselbe angreifenden Kräfte stets Gleichgewicht zu erhalten, auch wenn die Ebene gedreht wird, *kein anderer sein kann, als der Gleichgewichtspunkt der Kräfte* P_1, P_2 *und* P_3*.

*) Die Lage des Punktes O auf dem durch a, b und p bestimmten Kreise lässt sich (cfr. Schelle, Mechanik, Cap. VII, Mittelpunkt der Kräfte) aus allge-

Da nun aber ein Festhalten nichts anderes ist, als das Anbringen einer Kraft gleich der Resultante, so muss man in dem vorliegenden Fall die Resultante von P_1, P_2 und P_3 in dem Gleichgewichtspunkt O anbringen, um für alle Drehungen Gleichgewicht zu erhalten. Die Resultante kann dann ebenso an dem Punkte O fixirt bleiben, wie die Kräfte an ihren Angriffspunkten, d. h. es steht der Gleichgewichtspunkt O zur Resultante in genau derselben Beziehung, wie der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft zu dieser. Wir leiten daraus die Berechtigung her, den Punkt O den *Angriffspunkt der Resultante* zu nennen, und mag für die Folge diese Bezeichnung in dem beregten Sinne Verwendung finden.

Sind die Kräfte P_1 und P_2 parallel, so geht der durch die Angriffspunkte a und b derselben und den Schnittpunkt ihrer Richtungen gedachte Kreis in die unendliche Gerade über. Der Punkt O fällt auf die Linie $a—b$ und theilt diese im umgekehrten Verhältniss der angreifenden Kräfte. (Satz vom geradlinigen Hebel.)

Diese Betrachtung führt bei Annahme mehrerer parallelen Kräfte auf dem Gleichgewichtspunkt derselben oder den „Mittel-

---

meineren Betrachtungen ableiten, ebenso die Beziehung $\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}$. Schelle gibt dann den Ort ξ, η des Punktes O unter Annahme eines Coordinatensystems, wie Fig. 8, und unter Verwendung der hier gewählten Bezeichnung durch

$$\xi = \frac{\Sigma\,(P\cos\alpha)\,\Sigma\,(x\,P\cos\alpha + y\,P\sin\alpha)}{\Sigma^2\,(P\sin\alpha) + \Sigma^2\,(P\cos\alpha)}$$

$$\eta = \frac{\Sigma\,(P\sin\alpha)\,\Sigma\,(y\,P\sin\alpha - y\,P\cos\alpha)}{\Sigma^2\,(P\sin\alpha) + \Sigma^2\,(P\cos\alpha)}$$

und erwähnt die Eigenschaft dieses Punktes, dass er, als Angriffspunkt der Resultante benutzt, bei Vereinigung mehrerer Kräfte stets auf denselben Punkt führt, ganz unabhängig von der Reihenfolge der Vereinigung je zweier Kräfte, während man, wie oben eingehend nachgewiesen, im andern Falle stets einen andern Punkt findet.

punkt paralleler Kräfte,» also unserer Anschauungsweise folgend, auf den «*Angriffspunkt der Resultante* paralleler Kräfte.» Die Entfernung desselben von einer beliebigen Achse (resp. Ebene) ergibt sich bekanntlich, wenn man die Summe der statischen Momente der Kräfte in Bezug auf jene Achse durch ihre Summe dividirt, oder, unter Beibehaltung unserer frühern Bezeichnungsweise:

$$\xi = \frac{\Sigma (P x)}{\Sigma (P)}$$

$$\eta = \frac{\Sigma (P y)}{\Sigma (P)}$$

Es ist nun eine selbst in den neuern Werken *nicht allgemein* angenommene Anschauungsweise, dass der *Schwerpunkt* der *Mittelpunkt* der auf die einzelnen Theilchen eines Körpers wirkenden *parallelen Schwerkräfte* sei. Vielmehr findet man den selben häufig als Schnittpunkt zweier Schwerlinien definirt und diese als Theillinie einer Fläche für gleiche Momente entwickelt.

Nach dem Vorgange Poinsot's*) und dem obigen analog betrachten wir den Schwerpunkt als den Angriffspunkt der Resultante paralleler Kräfte, und wenden auf denselben die oben für ξ und η gefundenen Werthe an.

Um daher die Lage des Schwerpunktes eines von den beiden Coordinatenachsen und einer Curve der Gleichung

$$y = f(x)$$

*) Poinsot, Eléments de Statistique, Paris 1837, entwickelt die oben für ξ und η angegebenen Werthe (S. 102) in der Form:
$Rp = Px + P' x' + P'' x'' + \ldots$ und $Rq = Py + P' y' + P'' y'' + \ldots$
und sagt, S. 178 (§ 137):

Puisque le centre de gravité d'un corps n'est autre chose, que le centre des forces parallèles de la pesanteur, appliquées à toutes les molécules du corps.

eingeschlossenen Flächenstückes (Fig. 13) zu finden, bilden wir die Momente eines Elementarstreifens des Inhaltes

$$y\,dx$$

für die X-Achse:

$$= x.\,y\,dx$$

und für die Y-Achse:

$$= {}^1/_2\,y.\,y\,dx$$

und dividiren diese Momente durch den Inhalt des Streifens:

$$\xi_s = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}$$

$$\eta_s = {}^1/_2\,\frac{\int y^2\,dx}{\int y\,dx}$$

Wir können auch den Elementarstreifen durch Schnitte parallel der Abscissenachse erhalten, und es ergibt sich dann: (Fig. 13a)

$$\eta_{1s} = \frac{\int x\,y\,dy}{\int x\,dy}$$

$$\xi_{1s} = {}^1/_2\,\frac{\int x^2\,dy}{\int x\,dy}$$

Es bedarf wohl keines Nachweises, dass diese Werthe, ξ_{s1} und η_{s1} mit den obigen vollkommen identisch sind.*)

*) Diese Anschauungsweise weicht von der gewöhnlich üblichen ab. Meistens nimmt man zur Bestimmung von ξs die Schnitte parallel der Y-Achse und zur Bestimmung von ηs parallel der X-Achse, erhält also die beiden Werthe ξs und $\eta_1 s$ resp. $\xi_1 s$ und ηs. Wir werden weiter unten sehen, dass das hier eingeschlagene Verfahren, *dasselbe* Elementarstück für beide Coordinaten zu benutzen, viele Bequemlichkeiten bietet, und vor Allem geeignet ist, die Identität gewisser Punkte zu controlliren.

Cap. II.

Die Resultante der Widerstände nachgiebiger Medien und ihr Angriffspunkt.

Bewegt sich eine beliebige Fläche, z. B. die Oberfläche eines Geschosses (Fig. 14) gegen die Luft, so lässt sich mit Hülfe der von Newton und Euler angenommenen Principien der Druck berechnen, welcher auf jedes Elementarstück der Fläche ausgeübt wird.

Ist $a—b$ die Richtung der Bewegung des Geschosses, also $b—a$ die des die Oberfläche desselben treffenden Luftstromes, so kann man die sämmtlichen Elementarkräfte und ihre Angriffspunkte auf ein Coordinatensystem beziehen, dessen XZ-Ebene parallel dieser Richtung $b—a$ ist, wobei die Z-achse gleichzeitig die Achse des als Rotationskörper angenommenen Geschosses sei.

Nennen wir v die Geschwindigkeit, und ω den Winkel, welcher die Richtung $a\,b$ mit der in a errichteten Normalen (n) bildet, so kommt den oben angeführten Principien gemäss nur die Componente

$$v \cos \omega$$

zur Geltung und ist der Widerstand dem Quadrat dieser Componente proportional.

Ist daher df die Grösse des Flächenelementes, so ist der Normaldruck in a

$$\eta = \zeta\, v^2 \cos^2 \omega\, df$$

wo ζ den bekannten Widerstandscoefficienten der Luft bedeutet.

Ist ferner ϱ der Radius des dem Flächentheilchen zugehörigen Elementarscheibchens, dz die Dicke desselben, dann folgt:

$$df = \varrho \, d\varphi \, ds$$
$$ds = \sqrt{dz^2 + d\varrho^2}$$

daher:

$$n = \zeta v^2 \cos^2 \omega\varrho \, d\varphi \, ds$$

Dies ist mithin der Ausdruck für jede auf die Oberfläche des Geschosses wirkende (normale) Elementarkraft. Es handelt sich nun darum, die Mittelkraft dieser sämmtlichen Elementarwiderstände zu finden, berechnet für diejenige Fläche, welche innerhalb der Berührungslinie der mit $a—b$ Parallelen an dem Körper liegt.

Da die Winkel, welchen die einzelnen Elementarkräfte mit den Coordinatenachsen bilden, bekannt sind, wenn die Form des Körpers gegeben ist, so sind wir mit Hülfe der Gleichungen, welche wir für die Grösse, Richtung und einen Punkt ξ, η, ζ der Richtungslinie der Resultante im vorigen Capitel gefunden haben, im Stande, auch hier die *Grösse* und *Richtungslinie* des resultirenden Widerstandes anzugeben.

Man kann nun im Zweifel darüber sein, wohin man den *Ort* des *Angriffspunktes* zu verlegen hat. Eine scheinbare Berechtigung könnte dem Punkt zugeschrieben werden, in welchem die Richtungslinie die Oberfläche des Geschosses schneidet. Es würde dies offenbar derjenige Punkt sein, in welchem man dem Geschoss einen künstlichen Widerstand von der Grösse der Resultante am leichtesten entgegenzusetzen im Stande wäre, um momentan denselben Einfluss auszuüben, welchen der Luftwiderstand auf das Geschoss äussert. Hier aber treffen wieder die Betrachtungen zu, welche wir oben

über die verschiedenen Gleichgewichtslagen angestellt haben. Danach hat der beregte Punkt offenbar keine Berechtigung, als Angriffspunkt der Resultante der Luftwiderstände angesehen zu werden.

Professor Kummer behandelt das vorliegende Problem in seiner Schrift: »Ueber die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt« (aus den Abhandlungen der Academie der Wissenschaften, Berlin, 1875) in folgender Weise: Er *verlegt* die Elementarkraft n nach dem Schnittpunkte ihrer Richtung mit der Z Achse, p, und nimmt dort die Zerlegung in die 3 Componenten X, Y, Z vor, welche in der Fig. 14 in a ausgeführt ist. Es sind nun die cosinus der 3 Winkel, welche die Richtung n mit den Achsen X, Y, Z bildet, der Reihe nach:

$$\frac{dz}{ds}\cos\varphi, \quad \frac{dz}{ds}\sin\varphi, \quad \frac{d\varrho}{ds}$$

Bezeichnet man nun das Produkt $v^2\zeta$, welches für alle einzelnen Widerstände constant ist, mit K, so erhält man für die 3 betreffenden Elementarcomponenten:

$$K\cos^2\omega\varrho\, dz\cos\varphi\, d\varphi$$
$$K\cos^2\omega\varrho\, dz\sin\varphi\, d\varphi$$
$$K\cos^2\omega\varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

Diese Elementarwiderstände werden über die oben angegebenen Gränzen integrirt, und es entstehen die drei Componenten der Resultante:

$$X = K\int\int\cos^2\omega\,\varrho\, dz\,\cos\varphi\, d\varphi$$
$$Y = K\int\int\cos^2\omega\,\varrho\, dz\sin\varphi\, d\varphi$$
$$Z = K\int\int\cos^2\omega\, d\varrho\, d\varphi$$

Von diesen Componenten ist $Y = O$, da der Luftstrom als parallel der xz Ebene auftreffend angenommen wird, das

Geschoss aber zu dieser Ebene symmetrisch ist, mithin die der *Y*-Richtung angehörenden Componenten sich aufheben müssen.

Die Componente *Z* liegt in der *Z*-Achse selbst, und es wird nun angenommen, dass der Mittelpunkt des Luftwiderstandes da liegt, wo die Normale die *Z*-Achse schneidet.

Hiernach müsste also der betreffende Punkt unter allen Umständen *auf der Z-Achse* liegen, und wird auch in dem angezogenen Werk durch Fortführung der Operationen in dem angegebenen Sinne bestimmt.

Nun kann aber füglich nicht in Abrede gestellt werden, dass der gesuchte Punkt ein Punkt der Richtungslinie der Resultante sein muss, also folgt mit genau demselben Recht, dass es der Schnittpunkt der *Resultantenrichtung mit der Z-Achse* sei.

Wir haben jedoch im Cap. I gefunden, dass die *Verlegung* einer Kraft nach einem beliebigen Punkt ihrer Richtung nur Resultate zur Folge haben kann, welche sich auf die *Grösse* und *Richtungslinie* der Resultante bezieht, dass aber der *Ort*, wo bei solchen Constructionen die Resultante erscheint, nicht die geringste Bedeutung hat. Wenn also in der citirten Schrift ein *bestimmter innerer Punkt* gesucht wird, dessen Lage nicht abhängig von der Methode, sondern von der Lage der Angriffspunkte der wirkenden Kräfte sein soll, so kann es kaum ein anderer Punkt sein, als der *Gleichgewichtspunkt* der Elementarwiderstände, d. i. nach unserer Bezeichnungsweise der *Angriffspunkt der Resultante* sämmtlicher Normalkräfte, welche der Luftwiderstand auf der Oberfläche des Geschosses erzeugt. Mithin müssten hier die auf S. 13 in der Anmerkung angegebenen Formeln Verwendung finden.

Die vorstehende Betrachtung hat den Zweck, den Nachweis zu führen, dass gewisse Probleme sich mit der Richtungslinie allein nicht begnügen, sondern einen bestimmten Angriffspunkt verlangen, in welchem angebracht die Resultante genau dasselbe leistet, wie die componirenden Kräfte.

Die Nothwendigkeit einer solchen Anforderung wird von vielen Seiten bestritten.

Es mag dahin gestellt sein, ob eine solche existirt oder nicht. Jedenfalls aber ist die Frage nach einem Punkt berechtigt, der sich zur Resultante so verhält, wie die Angriffspunkte der Kräfte zu diesen, und dies ist namentlich da zu erwarten, wo den Kräften ganz bestimmte Angriffspunkte zugewiesen sind.

Ein solcher Fall liegt nun auch da vor, wo ein fester Körper in ein flüssiges Medium eingetaucht ist. Hier sind es die hydrostatischen Druckkräfte, welchen ganz bestimmte Angriffspunkte — die Elemente der Oberfläche — zugewiesen sind, und denen mindestens dem practischen Gefühl nach ein bestimmter Angriffspunkt ihrer Resultante entsprechen muss.

Es ist die Hauptaufgabe der vorliegenden Abhandlung, diesen Punkt, speciell für das Gebiet der Hydrostatik, festzustellen.

Bevor wir jedoch hierauf eingehen, mag die Bedürfnissfrage erörtert werden, und soll das folgende Capitel dieser gewidmet sein.

Die Bedürfnissfrage wird zu *verneinen* sein, wenn unsere Autoren nachweislich sich stets nur mit der *Richtungslinie* der hydrostatischen Mittelkraft beschäftigt haben. Sie wird dagegen im positiven Sinne entschieden werden müssen, wenn das Bemühen constatirt werden kann, einen solchen Punkt zu fixiren.

Wir wollen daher in dem folgenden Capitel untersuchen, wie die verschiedenen Autoren diejenige Kraft behandelt haben, welche vermöge der hydrostatischen Pressungen auf einen eingetauchten Körper wirkt, und im Besonderen, welche bestrebt ist, denselben senkrecht gegen das Niveau zu heben und im Allgemeinen mit dem Namen »Auftrieb« bezeichnet wird.

Cap. III.

Literarische Rundschau auf dem Gebiete des „Hydrostatischen Auftriebes."

1) BOUGUER: *Traité du navire.* Paris, Chr. Ant. Jombert. 1746.

Bouguer ist wohl einer der ältesten Schriftsteller auf diesem Gebiete, soweit auf dasselbe der mathematische Calcul angewendet ist. Er leitet zunächst auf dem bekannten Wege das Gesetz ab: »Die Grösse des hydrostatischen Auftriebes ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit«. Der Bestimmung des Angriffspunktes desselben widmet er keine weitere Betrachtung, sondern sagt nur (pag. 249): ..... „Nous devons maintenant examiner la distribution de cette pesanteur, et avant toutes choses donner quelque moyen simple de déterminer le centre de gravité de la partie submergée, *dans lequel nous savons que se réunit la poussée de l'eau.*" Es folgt dann folgende Methode: Man schneidet aus einem dünnen Brett den verkleinerten Spant aus und hängt dasselbe verschiedene Male — mit veränderten Angriffspunkten — an einem Faden auf. Die verlängert gedachten Fadenrichtungen geben in ihrem Schnittpunkt den Schwerpunkt der Fläche. B. verzichtet also auf jeden Beweis, und nimmt die beiden Punkte: Den Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge und den Angriffspunkt des Auftriebes ohne Weiteres als identisch an. Er acceptirt

das sogenannte »Archimedische Princip« voll und ganz und definirt:

»Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten »Flüssigkeit und hat seinen Angriffspunkt im Schwerpunkt »derselben.«

2. EULER: *Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux.* Paris, Claude Ant. Jombert. 1756.

Euler behandelt in dem ersten Capitel seines Werkes in sieben Paragraphen den Schiffskörper selbst in Bezug auf seine Schnitte, und geht im zweiten Capitel: »Sur la flottaison du vaisseau ou son état d'équilibre en général« auf das Schiff im Wasser über. Er sagt § 9:

»Pour juger de cet état d'équilibre où nous supposons que le vaisseau se trouve, il faut bien considérer toutes les forces qui agissent sur le vaisseau; et d'abord nous avons le propre poids du vaisseau tout entier, par lequel le vaisseau est poussé en bas selon l'axe *G C* qui passe par le centre de gravité du vaisseau. *Cette force doit donc être balancée par tous les efforts que l'eau exerce sur les parois de la partie submergée*, et par conséquent il faudroit calculer, pour chaque élément de la surface submergée, la pression, qu'il éprouve de l'eau; ce qui demanderoit des recherches assez embarrassantes et une longue suite de calculs; mais la considération suivante nous conduira très facilement à ce but.«

Euler findet also die Sache complicirt (embarrassant) und sucht die scharfe theoretische Betrachtung zu umgehen. Im § 10 braucht er dann die oft nach ihm angewandte und vielleicht auch von Archimedes benutzte Vorstellung, nach welcher man sich das Schiff durch einen Körper von genau der Form seines eingetauchten Theiles und der Dichtigkeit des Wassers ersetzt

denkt, durch welche Auswechselung offenbar das Gleichgewicht nicht gestört wird, und findet so zunächst den ersten Fundamentalsatz (§ 11): »Voilà donc le premier grand principe, sur lequel est fondée la théorie de la flottaison des corps, qui nagent sur l'eau . . . . .« Dann im § 12 fährt er fort: »Mais ce seul principe ne suffit pas pour déterminer l'état d'équilibre du vaisseau, il y en faut joindre un autre, que nous trouverons aussi aisément.« Nun macht Euler die Bedeutung des Schwerpunktes der ersetzenden Masse klar und darauf aufmerksam, dass die in diesem Schwerpunkt *(o)* angreifende Kraft, nach unten wirkend, alle den tragenden Wasserdrucken das Gleichgewicht hält, und findet: «Il faut, que le centre de gravité du vaisseau se trouve *dans la même verticale*, dans laquelle est situé le point *o*.«

Also der Systemschwerpunkt liegt senkrecht über dem Deplacementsschwerpunkt. Dann zieht er noch einmal die beiden wichtigen Sätze zusammen (§ 13): 1) que la partie submergée doit égaler en volume une masse d'eau dont le poids soit égal à celui du vaisseau; et 2) que le centre de gravité et le centre de la carène tombent *dans la même ligne verticale.*«

Nun aber fährt er fort: »Pour ce que regarde ce point *o*, il est evident, qu'il tombe toujours au-dessous de la ligne d'eau, et, si les coupes horizontales de la partie submergée conservoient en descendant partout la même étendue, de sorte qu'elle eût une figure ou prismatique ou cylindrique, *alors le point o tomberoit dans le milieu de la profondeur.* «Also bis vor Kurzem war nur die Lage des Angriffspunktes des Auftriebes in der durch den Systemschwerpunkt gehenden Vertikalen constatirt. Nun kommt ein Sprung und der Punkt *o* liegt im Deplace-

mentsschwerpunkt*). Man könnte vielleicht noch im Unklaren sein, ob Euler nicht unter diesem Punkt einfach den Deplacementsschwerpunkt als solchen verstanden wissen will, wenn er nicht im § 9 (die oben citirte, *gesperrt* gedruckte Stelle) deutlich gesagt hätte, dass das Gewicht des Schiffes im Gleichgewicht wäre mit allen den verschiedenen Wasserdrucken, deren Berechnung verwickelt wäre, und nur durch eine lange Reihe von Betrachtungen gefunden werden könne. Ganz gehoben wird dieser Zweifel über die Bedeutung des Punktes *o* im Kapitel VI, wo wir finden (§ 41): »Or le poids de cette masse (das verdrängte Wasser) étant égal au poids du vaisseau tout entier, si nous nommons ce poids = *M*, *la force appliquée en o* et qui pousse le vaisseau verticalement en haut, sera = *M*.«

Also: Der Systemschwerpunkt und der Angriffspunkt des Auftriebes liegen vertical über einander. Die scharfe Betrachtung der einzelnen Elementarkräfte erscheint für den Zweck der Schrift zu complicirt, es folgt eine ungefähre Beleuchtung der Sachlage durch einen practischen Vergleich — und der Auftrieb greift unversehens im Deplacementsschwerpunkt an, und zwar doch eigentlich nur, weil auch er senkrecht unter dem Systemschwerpunkt liegen muss.

Diesen Sprung, aus der Nothwendigkeit der verticalen Lage der drei Punkte: Systemschwerpunkt, Deplacementsschwerpunkt und Angriffspunkt des Auftriebes über einander den Schluss zu ziehen, dass der Schwerpunkt des Deplacements mit dem Angriffspunkt des Auftriebes identisch sei, werden wir noch oft vollführen sehen.

*) Dem Vorgange der meisten dieses Thema behandelnden deutschen Werke folgend, ist hier für den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers der Ausdruck: «Systemschwerpunkt», und für den der verdrängten Flüssigkeit die Bezeichnung: «Deplacementsschwerpunkt» verwendet.

3) CHAPMANN: *Architectura navalis mercatoria*, 2. Auflage, 1768, bearbeitet von Prommel, unter theilweiser Benutzung des schwed. Werkes, G. L. Uggla, 1864, Hamburg.

Wir finden, pg. 4:

Gravitäts-Centrum des Wasserraumes oder Deplacements wird der Punkt genannt, in welchem die Kraft des Wassers, das Schiff aufrecht zu erhalten, sich vereint, oder, was dasselbe ist: Der Schwerpunkt der Wassermasse, welche das Schiff beim Einsinken aus der Stelle drängt.

Die beiden Punkte werden also auch hier wieder zusammengeworfen, und zwar, wie bei Bouguer, ohne einen Versuch der Begründung.

4) POISSON: *Traité de Mécanique.* Mme. veuve Courcier, Paris. 1811.

Poisson behandelt in dem IV. Buche (Hydrostatique) seines berühmten Werkes zunächst die Pressungen, welche die Wandungen eines *gefüllten Gefässes von innen nach aussen* zu ertragen haben.

Er entwickelt dann (§ 493) den Bodendruck, geht durch die Annahme von übereinandergelagerten Flüssigkeitsschichten verschiedener Dichtigkeit auf den Druck der Gase über, und beweist so das Pascal'sche Gesetz für den allgemeinsten Fall. Im § 496 widmet er seine Aufmerksamkeit dem Angriffspunkt der Resultante der Seitendrucke, findet: »Il s'ensuit que le centre de pression sera toujours plus bas que le centre de gravité», entwickelt eine allgemeine Formel für den Ort dieses Punktes unter Annahme einer trapezförmigen Seitenfläche und stellt fest, dass für den Fall der horizontalen Lagerung derselben der Druck durch den Schwerpunkt der Fläche geht (§ 497). Dann verlegt er die eine Parallelseite des Trapezes

in das Niveau, entwickelt auch hierfür den Ausdruck, und constatirt, dass für diesen Fall der Angriffspunkt des Druckes auf die Fläche ganz unabhängig von der Neigung derselben gegen den Horizont sei. Die Formel lautet:

$$x_1 = \frac{l\,(m + 3n)}{2\,(m + 2n)}$$

Er stellt also die bekannte Formel für $l - x_1$

$$\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

noch nicht her. Dann geht Poisson zum Parallelogramm über, dessen eine Seite im Niveau liegt, und findet den Abstand des Punktes von der obern Seite = $^2/_3$ der Länge derselben, ebenso für das Dreieck als $^1/_2$ der Höhe, wenn die Basis im Niveau, als $^3/_4$ der Höhe, wenn die Spitze im Niveau liegt, bei dem letzteren paralleler Basis.

Im § 498 beleuchtet Poisson den *untergetauchten* Körper und entwickelt das Sichaufheben der horizontalen Componenten. Im § 499 finden wir endlich: »Quoique nous ayons supposé le corps entièrement plongé dans le fluide, notre raisonnement s'applique également au cas où il n'y est plongé qu'en partie: il est aisé, de voir que dans ce cas la résultante des pressions verticales du fluide est égale au poids de la masse fluide déplacée par la partie plongée du corps, et qu'elle est dirigée de bas en haut, suivant la verticale menée par le centre de gravité de cette masse«.

Also die theoretische Untersuchung führt zur ersten Hälfte des archimedischen Principes und dem Satz, dass die Richtung durch den Deplacementsschwerpunkt gehe. Nun aber fährt Poisson im directen Anschluss an Obiges fort: »Il est encore facile d'appliquer le même raisonnement au cas, où le fluide

est composé de couches horizontales et homogènes de différents densités. Pour avoir la résultante des pressions verticales qu'un semblable fluide exerce sur un corps qui est plongé en tout ou en partie, on imaginera chaque couche homogène prolongée dans l'intérieur du corps; ce qui formera une masse fluide, analogue à celle qui environne le corps et de même volume que sa partie plongée, la pression demandée sera égale au poids de cette masse fluide et appliquée à son centre de gravité«.

Also: Weil die aus verschieden dichten Schichten bestehende Flüssigkeitsmasse ausserhalb derselben der im Gefäss gleichgelagerten Flüssigkeit das Gleichgewicht hält und vielleicht, weil für den speciellen Fall eines horizontalen Trapezes als Gefässwand bewiesen ist, dass der Angriffspunkt des hydrostatischen Mitteldruckes mit dem Schwerpunkt dieser *Fläche* zusammenfällt und *obwohl* die Verschiedenheit der Lage des Angriffspunktes des qu. Druckes von der des Schwerpunktes wenige Zeilen vorher betont worden ist, fallen hier mit einem Male beide Punkte zusammen. Ein Schluss, welcher bei dem elementaren Problem des Druckes einer Flüssigkeit mit überall gleicher Dichtigkeit nur in einem besonderen Specialfall auf das Zusammentreffen der beiden fraglichen Punkte führt, wird ohne jeden mathematischen Calcul in dem oben citirten kurzen Abschnitt auf den viel complicirteren Fall übertragen, wo die Flüssigkeit aus Schichten verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzt ist.

Poisson hat sich also einen andern Punkt für den Durchbruch aus dem streng logischen Wege zu dem von Archimedes, Bouguer und Euler verfolgten gewählt, als diese letzten beiden Autoren. Er bleibt nunmehr auch auf demselben, führt uns

im folgenden Paragraphen das bekannte Beispiel von dem Ersatz der verdrängten Flüssigkeit durch einen starren Körper von der Dichtigkeit derselben vor und schliesst (§ 500): »d'où l'on conclut: 1) que les pressions qu'un corps fluide pesant exerce sur tous les points de la surface d'un corps solide, plongé dans ce fluide, ont une résultante unique; 2) que cette résultante est verticale et dirigée de bas en haut; 3) qu'elle est égale au poids de la portion de fluide déplacée par le corps; 4) *qu'elle est appliquée au centre de gravité de cette portion de fluide*«.

5) DUHAMEL: *Cours de mécanique de l'école polytechnique.* Bachelier, Paris. 1845.

Duhamel behandelt in seiner scharf mathematisch gehaltenen Mechanik die Hydrostatik etwas stiefmütterlich. Er sagt nirgends direct, dass der Angriffspunkt des Auftriebes im Deplacementsschwerpunkt läge, (Vol. 1, pag. 234): »Cela proposé, considérons un corps en équilibre sur un liquide homogène; les centres de gravité de ce corps et du liquide deplacé sont situés sur une même verticale, et les poids de ce liquide et du corps sont égaux«. Also die beiden Schwerpunkte liegen zunächst über einander. Duhamel nimmt auch offenbar nicht ein Zusammenfallen des Angriffpunktes des Auftriebes mit dem Deplacementsschwerpunkt an; denn, etwas später, sagt er, nachdem er dem schwimmenden Körper eine geringe Drehung ertheilt hat, um auf dynamischem Wege auf die Stabilität zu kommen (pg. 235): »Les forces, qui sollicitent le corps, sont la pesanteur et les pressions exercées par le liquide sur la partie plongée de la surface. La première se réduit à une force verticale, agissant de haut en bas, et égale au poids du corps. Les autres produisent le même effet que si tous les éléments de la partie

plongée du volume du corps étaient sollicités par des forces verticales, dirigées de bas en haut et égales aux poids de ces éléments, considérées comme formées du liquide lui-même«. Er sagt also nicht, dass dieser Punkt, wo sich die auf den eingetauchten Körper wirkenden Kräfte vereinen, der Deplacementsschwerpunkt sei, zeichnet zwar den letzteren ein, aber lässt die Mittelkraft der Auftriebe nur durch denselben gehen. Seine Folgerungen sind (pag. 238):

»..... D'où l'on conclut que, lorsque le centre de gravité du corps est au-dessous du centre de gravité du liquide déplacé dans l'état de l'équilibre, le dérangement restera toujours infiniment petit, et par conséquent l'équilibre est stable«. — Ferner, pag. 239: »L'équilibre peut donc être stable, lorsque le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du fluide déplacé; il suffit, que la distance de ces deux points soit moindre que la plus petite des mouvements d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport aux droites menées par son centre de gravité, divisé par le volume immergé«.

Duhamel stellt also als Bedingung für die Stabilität die Formel auf

$$a < \frac{b\,h^2}{V}$$

wo a die Entfernung der beiden Schwerpunkte, $b\,h^2$ das Trägheitsmoment der Schwimmebene und V das Deplacement bedeutet. — Alle diese Betrachtungen geben ihm also immer noch keinen Anlass, die Frage zu berühren. Etwas näher tritt er jedoch derselben in dem Folgenden (§ 155, pg. 239), gelegentlich der Erläuterung des Metacentrums: »Lorsqu'un corps symmétrique par rapport à son plan vertical est dérangé infiniment peu de sa position d'équilibre, il est sollicité par son poids et

par la pression du liquide qui se réduit à une force verticale *passant par le centre de gravité* du liquide déplacé. »Diese Stelle kann man eigentlich als den indirecten Beweis dafür ansehen, dass Duhamel den Angriffspunkt des Auftriebes *nicht* in den Deplacementsschwerpunkt verlegt, denn sonst kann er nicht gut sagen, dass die Richtung des Auftriebes nur den qu. Punkt passire. Er wirft also offenbar beide Punkte nicht zusammen. Aber er nennt den andern auch nicht. Er hat ihn mindestens zu seinen Berechnungen nicht nöthig, wenn man nicht so weit gehen will, zu sagen, dass er keine Liebe zu diesem Thema habe. Er sagt auch gleich darauf: »Cette théorie est défectueuse, parce que le volume infiniment petit que l'on négligeait, bien qu'il ne déplace qu'infiniment peu le centre de gravité du liquide, fait cependant varier d'une quantité finie la position du point de rencontre des deux droites qui font entre elles un angle infiniment petit«.

6) JAMES PEAKE: *Rudiments of Naval Architecture.* London, John Weale. 1855.

Peake lässt sich, wie Bouguer, auf Gründe nicht ein und sagt ganz offen (pag. 4): »It is not intended to give the mathematical demonstrations, on which these uses are founded«. Er verwendet also die gewöhnliche Anschauung und spricht nur von dem »Centre of Gravity of Displacement of a Ship«, ohne irgend welche Betrachtungen daran zu knüpfen.

7) CARL MIELICHHOFER: *Anleitung zur Schiffbaukunde.* Wien, Carl Gerold's Sohn. 1857.

Mielichhofer geht ebenfalls nicht weiter auf die Idee der »Vereinigung der tragenden Drucke ein«, und nimmt kurzweg den in dem Capitel »Wasserverdrängung und deren Schwerpunkt« (§ 4, Cap. I, Statik des Schiffes) erläuterten Deplace-

mentsschwerpunkt als den Angriffspunkt des Auftriebes an, welchen er auch in Statik und Dynamik als solchen beibehält. Bei den Beweisen wird auch stets die Entfernung des Metacentrums resp. des Systemschwerpunktes vom Deplacementsschwerpunkt eingeführt.

8) WEISSBACH: *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik.* Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1846/60.

Weissbach behandelt in seinem classischen Werke das vorliegende Thema am vollständigsten. Er schlägt dabei den Weg Poisson's ein und geht von einem *mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäss* aus. Er sagt § 328: »Die Mittelkraft $P = FH\gamma$ aus sämmtlichen Elementarpressungen $F_1 H_1 \gamma_1$, $F_2 H_2 \gamma$, . . . hat, wie jede andere Mittelkraft eines Systemes von Parallelkräften, *einen bestimmten Angriffspunkt*, den man *Mittelpunkt des Druckes* nennt. Durch Unterstützung dieses Punktes wird dem ganzen Wasserdruck der Flächedas Gleichgewicht gehalten.«

Er bestimmt dann genauer wie irgend einer der vorgenannten Autoren die Lage dieses Angriffspunktes und entwickelt

1) Tiefe des Punktes unter dem Niveau:

$$n = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \ldots .}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots .} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

2) Horizontaler Abstand des Punktes von einer verticalen Ebene:

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + \ldots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots .} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

Diese Werthe werden an einer grossen Anzahl von Beispielen erläutert.

Im § 335 (Auftrieb) geht Weissbach nun auf die Pressungen über, welche *ein in Wasser getauchter Körper* zu erleiden

hat. Er weist zunächst nach, dass der Horizontaldruck sich aufhebt und nur ein Verticaldruck zur Geltung kommt, und leitet dann den Satz ab: Hiernach ist also der Auftrieb oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen darin eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.

Nachdem W. so die erste Hälfte des archimedischen Princips abgeleitet, geht er in directem Anschluss auf die andere über und bestimmt den Angriffspunkt des Auftriebes. Während er aber oben für den Angriffspunkt des hydrostatischen Wanddruckes *beide Coordinaten (u* und *v)* berechnet, *begnügt er sich hier mit dem Abstand des Angriffspunktes von einer verticalen Ebene*, und findet:

$$x = \frac{V_1\ a_1 + V_2\ a_2 + \ldots .}{V_1 + V_2 + \ldots .},$$

wo x diesen horizontalen Abstand, $V_1 \ldots$ das Volumen eines Elementarsäulchens und $a_1 \ldots$ den horizontalen Abstand desselben von der angenommenen Verticalebene bedeutet. Nun folgert er:

«Da sich der Schwerpunkt des Körpers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, *dass der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge zusammenfällt.*»

Die *verticale Componente*, der Abstand des qu. Punktes von einer horizontalen Ebene wird *nicht* bestimmt. Ohne den sonst üblichen Vergleich des verdrängten Wassers mit einem starren Körper von gleichem spec. Gewicht hier anzustellen, kommt W. zu dem Resultat, dass der Angriffspunkt des Auftriebes und

der Deplacementsschwerpunkt *senkrecht unter einander* liegen und folgert daraus, dass beide Punkte *zusammenfallen* müssen.

Stellen wir nun dieser ersten deutschen Autorität einen beinahe ebenso gewichtigen englischen Schriftsteller gegenüber:

9) J. SCOTT RUSSEL: *The modern System of naval architecture.* 1860. Selbstverlag.

In diesem grossartig angelegten Werke*) finden wir (Vol. I. Ch. V) unter: »Powers of shoulder and under-water body«, pg. 15: »Let us examine the nature of the upsetting force, produced by under-water body (Fig. 586) ..... We may therefore take its whole effect as concentrated in a point in its middle line. This point we call *B* or centre of effort of the under-water body.« Russel vermeidet offenbar den bestimmten Ausdruck, dass der Auftrieb seinen Angriffspunkt im Deplacementsschwerpunkt habe und gibt ihm den besonderen Namen »Centre of effort of the under-water body«. Er betont mehr wie jeder Andere die Zunahme des Druckes pro Flächeneinheit mit der Tiefe und gibt denselben sogar in einer besonderen Tabelle (Table of pressure of the bottom of a ship in sea water pg. 12) an. Jene Figuren aber stellen ein eingetauchtes Rechteck dar, wo nun doch wieder in Ermanglung eines anderen der Auftrieb genau in der Mitte der Höhe, im Deplacementsschwerpunkt, angreift. Wie Poisson, Duhamel und Weissbach verlässt er den richtigen Weg kurz vor dem Ziel.

10) JOHN W. NYSTROM: *A treatise on parabolic construction of ships.* Philadelphia, J. B. Lippincott & Co. 1863.

*) Russel's Naval Architecture ist wohl das gewichtigste Werk, welches je geschrieben worden ist, und zwar in des Wortes vollster Bedeutung. Der Text allein wiegt mehrere Centner, und ein gleiches Gewicht dürfte annähernd den in grosser Anzahl vorhandenen und ungemein sauber gefertigten Zeichnungen zuzuschreiben sein.

Nystrom verfolgt die Theorie der Parabellinien (Chapmann, 1775) in ausgedehnter Weise und liefert höchst beachtenswerthe Daten für das engere Gebiet der Schiffsformen. Er kommt aber auf die Entstehung des Auftriebes nicht weiter zu sprechen und nimmt in dem Theil „*On Theory*" (pg. 18), welcher eine sehr interessante Vorbetrachtung über »Theorie und Praxis« enthält, ebenfalls den Deplacementsschwerpunkt als den Angriffspunkt des Auftriebes an (cfr. auch pg. 27 und Fig. 2 seines Werkes).

11) RANKINE: *Shipbuilding, theoretical and practical.* London, William Mackenzie. 1866.

Das vorliegende Werk ist nächst Russel das umfangreichste der einschlägigen Literatur und gilt wohl mit Recht auch als eines der gediegensten, wie sich sein Verfasser ja auch auf anderem Gebiete berühmt gemacht hat. Wir finden dort gleich zu Anfang (Ch. I.: Nature and objects of the Hydraulics of Shipbuilding), § 2: »The Buoyancy of a ship depends on the following principles:

I. That in ordre that a body may remain steady in a given position, the forces acting upon it must be balanced; which, in the case of there being two forces, means that they must be *equal and directly opposed to each other.*

II. That a body plunged into a still fluid is urged downwards by its own weight, and pressed upwards by the fluid with a force equal and opposite to the weight of the manner of fluid, which the body displaces.

III. That consequently, in order that a given body, such as a ship, may float steadily in a given position in smooth water the weight of the volume of water displaced must be equal to the weight of the body; and the total upward pressure of the water, which is equal and opposite to the weight of

the water displaced, must be directly opposed to the weight of the body.» Diese drei Sätze enthalten eigentlich, streng genommen, nichts weiter, als das archimedische Princip: Ein schwimmender Körper verdrängt so viel Wasser, als er selbst schwer ist.

Wir finden dann, ähnlich wie bei Euler, den Versuch, dies experimentell abzuleiten: Man füllt eine Schaale mit Wasser bis genau zum Rand und setzt eine zweite zum Schwimmen hinein. Es wird Wasser überfliessen und wenn man diese übergeflossene Wassermenge wiegt, so findet man genau dasselbe Gewicht, wie das der schwimmenden Schaale. Also nur ein beweisendes Experiment, ohne Erklärung des inneren Zusammenhanges, wie wir es eigentlich bei Euler besser fanden.

Unter § 3: »Centres of Gravity and of Buoyancy« werden diese beiden Namen zunächst in ihrer Bedeutung erklärt: »That point, in the case of a body's weight, is called the centre of gravity of the body; in the case of a pressure it is called centre of pressure, and when the pressure is that of a fluid, in which a solid body floats, the centre of buoyancy. The single or concentrated force, which is thus conscribed to be equivalent to a given diffused force, is called the resultant of the diffused force.«

»It is necessary of the principle Nr. II stated at the be»ginning of the preceding article, that the centre of buoyancy »of a floating body must occupy the place of the centre of gra»vity of the mass of fluid displaced, and hence that point is »sometimes called the centre of displacement.«

Nr. II aber enthält nichts als den Satz, dass das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleich sein muss dem des schwimmenden Körpers, woraus höchstens nur der Schluss der verti-

calen Lage über einander gezogen werden könnte. Also Rankine macht ebenfalls diesen nun so oft vollführt gesehenen Sprung, aus der Nothwendigkeit der gemeinsamen Verticalen auf das Zusammenfallen der beiden Punkte zu schliessen.

Den Versuch, den Punkt des Auftriebes zu bestimmen, finden wir also bisher nur bei Poisson und Weissbach, und, wie constatirt, leider nicht bis zum definitiven Erfolg ausgedehnt.

12. M. BISCHOF: *Des Schiffbauers Taschenbuch.* Braunschweig, Vieweg und Sohn. 1867.

Wir sehen hier genau denselben Vorgang, wie bei Weissbach: Erst die richtige Angabe des Druckes auf eine geneigte Fläche, die genaue Angabe der Lage des Angriffspunktes dieses Druckes, auch die Berechnung des Verticaldruckes auf eine krumme Fläche — aber *ohne* Angabe des Angriffspunktes — und endlich das bekannte Gesetz (pag. 104 u. f.): Der Auftrieb eines in eine Flüssigkeit getauchten Körpers ist gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit. — Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.

13. *Leitfaden für den Unterricht im Schiffbau an der königlichen Marineschule zu Kiel.* 1872.

Seite 125 (VI, Stabilität), § 272 ..... Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt im Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge, dem Deplacementsschwerpunkt.

Es ist hier naturgemäss kein Versuch gemacht worden, eine Erklärung zu geben, da die Leitfäden der betreffenden Schule sich gegenseitig ergänzen und sich daher auf die Lehren der anderen Disciplinen nur zu beziehen haben. Dies trifft hier den

14. *Leitfaden für den Unterricht in der Naturlehre.*

1869—75. (Von dem Verfasser, als damaligem Lehrer für Naturlehre).

Cap. II, Vom Gleichgewicht und der Bewegung der Flüssigkeiten.

§ 62: Ein Körper schwimmt im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt und der der verdrängten Flüssigkeitsmasse in einer Verticalen liegen.

Ich habe also bereits 1869 den Begriff des Angriffspunktes des Auftriebes als eine ungelöste Frage betrachtet und die Angabe des Ortes desselben ängstlich vermieden.

15. E. GARDINER FISHBOURNE: *The current fallacies in the Naval Architecture.* London, E. & F. N. Spon. 1871. (Hassenstein, 1873).

Das Werk ist von Hassenstein in's Deutsche übertragen und sei es daher gestattet, den Text dem letzteren zu entnehmen. (Hassenstein, Cap. z, See, 1873, Kiel, Universitätsbuchhandlung).

Der Autor befindet sich in einem eigenthümlichen Conflict. Sein practischer Verstand sagt ihm, dass die Annahme des Angriffspunktes des Auftriebes im Deplacementsschwerpunkt *falsch* sei und verlegt ihn direct *nach dem Boden.* (Wir werden später sehen, dass dies für einen bestimmten Fall das Richtige ist). Seine Theorie reicht aber nicht aus, um das, was das practische Gefühl dem an Bord ergrauten Seemanne zeigt, mathematisch zu beweisen, und die ganz natürliche Folge ist eine Reihe von Auslassungen, die den energischen Kampf des practischen Verstandes gegen die allgemeine Behauptung bekundet, aber, nicht genügend von theoretischen Kenntnissen unterstützt, zu manchen nicht ganz correcten Vorstellungen führt. Er sagt, pag. 5: Mittelpunkt des Druckes wird gewöhnlich mit

dem Mittelpunkt der Schwimmkraft gleich erachtet; doch ist dies nie der Fall. Der Mittelpunkt des Druckes ist der Punkt, an welchem alle an einem Schiffsboden agirenden Kräfte als wirklich wirkende angenommen werden müssen, oder für den Zweck der Abhandlung nenne ich ihn den Mittelpunkt aller verticalen Kräfte, welche ein Schiff unterstützen.

Also *zum ersten Male* finden wir hier die offene Behauptung, mit dem vollen Bewusstsein des Widerspruches, aufgestellt, dass der Mittelpunkt der Schwimmkraft nicht mit dem Mittelpunkt des Druckes, dem Mittelpunkt aller verticalen tragenden Kräfte, zusammenfällt. Allerdings ist hier nun wieder die Bezeichnung: Mittelpunkt der Schwimmkraft für den Deplacementsschwerpunkt gesetzt. Er definirt aber, wenn wir das Original zur Hand nehmen: »The centre of buoyancy (Mittelpunkt der Schwimmkraft) is defined to be the mean centre of the immersed portion of any floating body». Und vorher: «And the centre of this volume (displacement) is termed the centre of gravity of displacement, *or centre of buoyancy*, and sometimes also the centre of figure«. Also ist unzweideutig die Verschiedenheit des »Mittelpunktes der Schwimmkraft«, alias Deplacementsschwerpunkt, von dem Mittelpunkt aller verticalen tragenden Kräfte (Angriffspunkt des Auftriebes) betont.

16. BERTIN: *Notice sur la Marine à vapeur de guerre et de commerce.* Paris, Dunod. 1875.

Das zwar kleine, aber sehr klar und umfassend gehaltene Werk sagt, Chap. I, § 4, pag. 7: »De la stabilité et metacentre. La stabilité des navires consiste dans la propriété de se tenir en équilibre sur l'eau, bien que le centre de gravité soit au-dessus du centre de carène ..... quand le centre de carène est venu en l, la poussée lF et le poids F forment un couple qui tends toujours à redresser le cylindre«.

Bertin, welcher sein Werk im Auftrage des berühmten Ledieu schreibt, lässt sich zwar nicht über die genaue Lage unseres Punktes aus, gibt nur die Nothwendigkeit der senkrechten Lage desselben mit dem Systemschwerpunkt an, aber verlegt in den Figuren doch den Angriffspunkt des Auftriebes direct in den Deplacementsschwerpunkt.

17. W. H. WHITE: *A Manual of Naval architecture.* London, John Murray*). 1877.

Das Werk gehört unstreitig zu den ersten über Schiffbaukunst. Aber auch White geht harmlos die Wege der Anderen:

Chap. III, pag. 60: »A ship floating freely and at rest in still water must fulfil two conditions: First, she must displace a weight of water equal to her own weight; second, her centre of gravity must lie in the same verticale line with *the centre of volume of displacement or »centre of buoyancy«*. Also kurz und bündig: Deplacementsschwerpunkt oder Mittelpunkt der Schwimmkraft. — Das Wort »buoyancy« finden wir an einer früheren Stelle sehr schön definirt, welche eigentlich einen anderen Schluss erwarten liess (pag. 283). »At every point on the bottom of a ship afloat, the water pressure acts perpendicularly to the bottom. This normal pressure at any point depends upon the depth of the point below the water surface, and it may be regarded as made up three component pressures. First, a vertical pressure; second, a horizontal pressure acting athwartsships, third, a horizontal pressure acting longitudinally..... The sum of the vertical components must be balanced by the weight of the ship, which is the only other vertical force; this

*) Eine deutsche Uebersetzung dieses Werkes ist von den Herren O. Schlick und A. van Hüllen unternommen und kurz nach der Zusammenstellung des Obigen bereits in der ersten Lieferung erschienen.

sum is usually termed the »buoyancy«; it equals the weight of water displaced, and the two terms »buoyancy« and »displacement« are often used interchangeably«.

Die Definition dieser beiden Worte ist also dieselbe, wie sie bereits Fishbourne gegeben. Dieser will die Orte streng getrennt wissen, während White sie, wie die meisten Anderen, einfach zusammenwirft.

Die vorstehende Uebersicht umfasst nun einen Zeitraum von ca. 140 Jahren und enthält wohl so ziemlich die meisten der bedeutenderen Werke, welche sich mit der Hydrostatik beschäftigt haben. Wir können dieselben in vier Gruppen eintheilen und zwar:

1. Solche, welche ohne Weiteres den Angriffspunkt des Auftriebes in den Deplacementsschwerpunkt verlegen:

Bouguer, Chapmann (Prommel), Peake, Mielichhofer, Nystrom, Leitfaden für Schiffbau (Kiel), Bertin und White.

2. Solche, welche den Versuch machen, ihn zu bestimmen, aber schliesslich doch bei der alten Annahme stehen bleiben:

Euler, Poisson, Weissbach (Russel, Rankine), Bischof.

3. Solche, welche die definitive Angabe vermeiden:

Duhamel, Leitfaden für Naturlehre (Kiel), und

4. Solche, welche direct die Verschiedenheit der Punkte behaupten:

Fishbourne und sein Uebersetzer Hassenstein.

Wir constatiren nun zunächst, dass keiner der genannten Schriftsteller (mit Ausnahme vielleicht von Duhamel) den Angriffspunkt des Auftriebes ganz ignorirt und sich nur mit der Richtungslinie zufrieden gibt. Wir finden ferner, dass eine

unanfechtbare Begründung resp. Bestimmung der Lage des qu. Punktes nirgends zu finden ist, dass im Gegentheil die sämtlichen Versuche, welche in dieser Richtung gemacht worden sind, entweder in ein practisches, irreführendes Beispiel übergehen, oder aber (Weissbach) auf halbem Wege stehen bleiben.

Hiermit dürfte der am Schluss des vorigen Capitels geforderte Nachweis geliefert sein, und haben wir nunmehr der vorgelegten Frage nach der Lage des Angriffspunktes des Auftriebes näher zu treten.

Cap. IV.

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebes schwimmender Körper.

Wir definiren zunächst mit Weissbach (s. o. S. 32) den Angriffspunkt des Auftriebes als denjenigen Punkt, in welchem man den schwimmenden Körper stützen muss, damit er genau so getragen werde, wie durch die hydrostatischen Pressungen. Da nun der Auftrieb speciell die Resultante sämmtlicher verticalen Pressungen, der verticalen Bodendrucke ist, so haben wir hier einfach die in den früheren Capiteln besprochenen Formeln für den Angriffspunkt der Resultante paralleler Kräfte zu verwenden.

Sind also $x \ldots$ und $y \ldots$ die Coordinaten der Angriffspunkte der einzelnen Bodendrucke, deren Grösse mit $P..$ bezeichnet werde, so sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante derselben:

$$\xi = \frac{\Sigma (Px)}{\Sigma (P)} \quad \eta = \frac{\Sigma (Py)}{\Sigma (P)}.$$

Es sei nun

$$y = f(x)$$

die Gleichung derjenigen Curve (Fig. 15), welche einen Querschnitt des eingetauchten Körpers begrenzt, dessen X-Achse im Niveau der Flüssigkeit liege. — Wir wollen ferner annehmen, dass der eingetauchte Körper die Gestalt einer Scheibe habe,

also von zwei parallelen Schnitten begrenzt sei, deren Abstand wir mit b bezeichnen; ist dann dl die Länge eines Curvenstückchens mit den Coordinaten x und y, so ist die Grösse des benetzten Flächenelementes

$$df = b \,.\, dl$$

und der auf diese Fläche wirkende Normaldruck:

$$dp = y \,.\, b \,.\, dl \,.\, \gamma.$$

Wir wollen nun der Einfachheit halber die Annahme machen, dass $\gamma = 1$ sei, und diesen Factor für die Zukunft ganz fortlassen.

Ist nun noch α der Winkel, welchen das Flächenelement mit der Horizontalen bildet, so ist die auf dasselbe wirkende Verticalcomponente P des Normaldruckes

$$P = dp \,.\, \cos\, \alpha = y \,.\, b \,.\, dl \,.\, \cos\, \alpha$$

da nun $$dl \,.\, \cos\, \alpha = dx$$

so folgt $$P = y \,.\, b \,.\, dx.$$

Nun sind die Coordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft $= x$ und y, mithin wird

1) Der Abstand des Angriffspunktes des Auftriebes von der Ordinatenachse:

$$\xi = \frac{\int x\, y\, b\, dx}{\int y\, b\, dx} = \frac{\int x\, y\, dx}{\int y\, dx}$$

2) Der Abstand des Angriffspunktes des Auftriebes vom Niveau (der Abcissenachse)

$$\eta = \frac{\int y^2\, b\, dx}{\int y\, b\, dx} = \frac{\int y^2\, dx}{\int y\, dx}$$

Es sind der Form nach dies genau dieselben Werthe, welche Weissbach, wie Seite 27 gezeigt, bereits für u und v, die Coordinaten des Angriffspunktes des hydrostatischen Flächendruckes gefunden hat. Sie enthalten im Zähler das

Centrifugal- resp. Trägheitsmoment, im Nenner das statische Moment der Projectionen der Elementarflächen auf die Horizontalebene *(b . dx)* und führen auch zu ganz ähnlichen Beziehungen. Vergleichen wir nämlich die auf S. 15 für die Lage des Schwerpunktes dieser Scheibe gefundenen Werthe mit diesen, so sehen wir, dass:

$$1) \quad \xi_5 = \frac{\int x\, y\, dx}{\int y\, dx} = \xi$$

d. h. der Abstand des Angriffspunktes des Auftriebes von einer Verticalebene ist gleich dem des Deplacementsschwerpunktes.

Es ist dies der Satz, den bereits Weissbach (s. S. 33) gefunden hat und den wir auch, wie folgt, ausdrücken können:

Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt senkrecht unter dem Deplacementsschwerpunkt. Dann aber finden wir:

$$2) \quad \eta_5 = {}^1/_2 \frac{\int y^2\, dx}{\int y\, dx} = {}^1/_2\, \eta$$

Es ist mithin die Ordinate des Deplacementsschwerpunktes, gerechnet vom Niveau, die *Hälfte* der Ordinate des Angriffspunktes des Auftriebes, oder: Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt in der *doppelten Tiefe* des Deplacementsschwerpunktes.

Hiernach liegt der Angriffspunkt des Auftriebes (Fig. 15, *a*—*e*)

a) beim geraden Rechteck: am Boden (Fishbourne);

b) beim Dreieck mit einer verticalen Seite: auf $^2/_3$ der Tiefe;

c) bei einem beliebigen Dreieck: in $^2/_3$ der Tiefe;

d) bei einem Halbkreis: in der Tiefe $= \frac{8\,r}{3\,\pi}$

e) bei der Parabelfläche: in $^4/_5$ der Tiefe.

Diese Folgerung hätte z. Th. schon Poisson auf Grund der von ihm entwickelten Formeln machen können.

Wir fanden oben, dass nach seinen Entwickelungen der Druck für eine dreiseitige Fläche, dieselbe als Gefässwand mit innerem Druck (Fig. 15, *f*) betrachtet, auf 1/2 der Tiefe zu setzen sei. Nehmen wir nun an, das Gefäss sei eine dreiseitige Pyramide, deren eine, der Fläche gegenüberliegende Kante senkrecht stehe, so wird dieselbe von zwei verticalen und einer schrägen Ebene begrenzt. Taucht man nun diese Pyramide, die Spitze nach unten, in Wasser, so können unmöglich diejenigen Druckkräfte tragend wirken, welche die beiden verticalen Wandungen treffen, sondern es kann der gesammte Auftrieb nur von dem auf der schrägen Fläche lastenden Druck herrühren, also die verticale Componente des Letzteren sein. Da nun, wie oben gezeigt, bereits von Poisson die Beziehung zwischen dem inneren Druck auf die Wandungen eines mit Wasser gefüllten Gefässes und dem äusseren eines in Wasser getauchten Gefässes festgestellt worden sind, so lag der directe Schluss nahe, dass in dem vorliegenden Fall der Auftrieb in *a* seinen Angriffspunkt habe, also in 1/2 der Tiefe, während der Schwerpunkt auf 1/4 derselben liegt.

Berücksichtigt man ferner, dass die Mittelkraft der auf den ebenen Boden der Figur 15 *a* wirkenden, nach oben gerichteten Pressungen nach dem Obigen nicht gut anders, als am Boden selbst angreifen kann, so findet man auch hier die elementare Ableitung des Satzes, dass der Angriffspunkt des Auftriebes doppelt so tief wie der Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge liegt, zumal, wenn man sich einen beliebigen schwimmenden Körper in eine grosse Anzahl verticaler Säulen zerlegt denkt, wo bei jeder Säule der Angriffspunkt des Auftriebes in

der doppelten Tiefe des betreffenden Deplacementsschwerpunktes sich befindet. Die sämmtlichen Schwerpunkte bilden dann eine äquidistante Fläche zur Bodenfläche und lässt sich so der Satz mindestens elementar übersehen, dass der Angriffspunkt des Auftriebes nicht mit dem Deplacementsschwerpunkt zusammenfallen kann.

Cap. V.

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Abtriebes bei untergetauchten Körpern.

Unter »hydrostatischer Abtrieb« wollen wir diejenige Kraft verstehen, mit welcher ein untergetauchter Körper *von oben her* gepresst wird.

Bezeichnen wir wieder die Coordinaten des Flächenelementes einer durch zwei parallele Schnitte entstandenen Elementarscheibe (Fig. 16) von der constanten Breite b mit x und y, wobei die X-Achse wieder mit dem Niveau zusammenfallen soll, so ist der normal zum Flächenelement gerichtete Druck ($\gamma = 1$)

$$dp = y \,.\, b \,.\, dl$$

Die Verticalcomponente dieses Druckes ist

$$P = dp \,.\, \cos\, \alpha = y \,.\, b \,.\, dl \,.\, \cos\, \alpha$$

wenn α der Winkel ist, welchen das Flächenelement mit der X-Achse bildet.

Da nun

$$dl \,.\, \cos\, \alpha = dx$$

so folgt:

$$P = y \,.\, b \,.\, dx$$

Mithin sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante sämmtlicher verticalen Druckkräfte

$$\xi_a = \frac{\int_t^T xy\,dx}{\int_t^T y\,dx}$$

$$\eta_a = \frac{\int_t^T y^2 dx}{\int_t^T y dx}$$

Verwenden wir nun dieselbe Fig. 16 zur Berechnung des Schwerpunktes der *oberhalb* der Fläche $y = f(x)$ befindlichen Wassermenge, so erhalten wir für das Volumen einer Elementarsäule:

$$dv = by\,dx$$

und die Coordinaten des Schwerpunktes derselben

$$x \text{ und } \frac{y}{2},$$

mithin sind die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Volumens zwischen den Ordinaten $y = t$ und $y = T$:

$$\xi_S^1 = \frac{\int_t^T xy\,dx}{\int_t^T y\,dx}$$

$$\eta_S^1 = \frac{1}{2} \frac{\int_t^T y^2 dx}{\int_t^T y\,dx}$$

oder:

$$\xi_a = \xi_S^1; \quad \eta_a = 2\eta_S^1$$

Da nun ξ_S^1 und η_S^1 die Coordinaten des *über* der gepressten Fläche befindlichen Volumens sind, so folgt der Satz:

»Der Angriffspunkt des hydrostatischen Abtriebes liegt senkrecht unter dem Schwerpunkt der *pressenden Flüssigkeitssäule* und in der doppelten Tiefe desselben«.

Cap. VI.

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebes untergetauchter Körper.

(Allgemeiner Fall.)

Der Auftrieb untergetauchter Körper setzt sich zusammen aus den von oben nach unten und von unten nach oben wirkenden Pressungen.

Da hier die auch beim Schwerpunkt krummer Figuren beobachtete Erscheinung zu Tage tritt, dass der Punkt ganz ausserhalb des Körpers fällt, so sei es gestattet, den bezüglichen Fundamentalsatz elementar abzuleiten, obwohl sich ergeben wird, dass er nur eine Verallgemeinerung eines bereits bekannten Satzes ist.

Wir verwenden dazu den folgenden *Hülfsatz:*

»Die Resultante zweier parallelen und einander *entgegen-*
»*gesetzten* Kräfte ist gleich der *Differenz* derselben. Ihr Angriffs-
»punkt liegt auf der Seite der grösseren Kraft und auf der
»Verbindungslinie der beiden gegebenen Angriffspunkte und es
»verhalten sich die Kräfte umgekehrt wie die angrenzenden
»Entfernungen von dem der Resultante.«

Der Beweis dieses elementaren, bisher wenig benutzten Satzes folgt leicht aus der Fig. 17. Ist nämlich R die Kraft, welche die beiden Kräfte P_1 und P_2 zu ersetzen im Stande ist,

so muss sie, entgegengesetzt angebracht, denselben das Gleichgewicht halten. Mithin folgt:

$$P_1 = P_2 + R;\ R = P_1 - P_2$$

und

$$P_2\ (x_2 - x_1) = R\,x_1$$

daher:

$$P_2\ (x_2 - x_1) = (P_1 - P_2)\ x_1$$

$$\frac{P_2}{P_1 - P_2} = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Dies stimmt mit dem oben angegebenen Satz überein.

Haben wir nun, Fig. 18, wiederum zwei parallele, aber einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 in a und P_2 in b, und handelt es sich darum, den Abstand η des Angriffspunktes c der Resultante derselben von einer zu ihrer Richtung senkrechten Achse m-n zu bestimmen, so würden wir zunächst wieder ansetzen können:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Zieht man nun durch den Punkt c eine Parallele zu m-n und bezeichnet die Abstände der Punkte a und b von derselben mit l_1 und l_2, die von m-n mit y_1 und y_2, so ist:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

Da nun

$$y_1 = \eta + l_1 \text{ und } y_2 = \eta + l_2, \text{ also}$$

$$l_1 = -\eta + y_1 \text{ und } l_2 = -\eta + y_2, \text{ so folgt:}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{-\eta + y_2}{-\eta + y_1}$$

$$\eta = \frac{P_1 y_1 - P_2 y_2}{P_1 - P_2} = \frac{P_1 y_1 - P_2 y_2}{R}$$

Nun kann man aber die Kraft P_1 als Resultante einer beliebigen Anzahl *nach oben* gerichteter parallelen Kräfte und ebenso P_2 als eine solche von *nach unten* gerichteten ansehen. Versieht man, den Druck nach oben positiv nehmend, letztere mit dem negativen Zeichen, so ist, algebraisch genommen:

$$\eta = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$$

Wir finden also den Satz: »Die Entfernung des Mittelpunktes paralleler Kräfte von einer Ebene wird erhalten, wenn man die Summe der statischen Momente derselben in Bezug auf die Ebene durch ihre Summe dividirt« auch für parallele Kräfte *mit verschiedenen Richtungen* anwendbar, wenn man nur die eine Richtung positiv und die entgegengesetzte negativ in Rechnung zieht.

An diesem Satz wird nichts geändert, wenn der Winkel der Linie *a-c* mit der Achse *m-n* grösser oder kleiner, eventuell ein rechter wird. Im letzteren Fall nimmt das System die in Fig. 19 angegebene Lage an. Wir beobachten dabei, dass der Punkt *c*, der Angriffspunkt der Resultante, ganz herausrückt, wie es stets der Fall ist, wenn zwei entgegengesetzte parallele Kräfte vereinigt werden.

Sind die beiden Kräfte P_1 und P_2 einander gleich, dann wird die Resultante $(P_1 - P_2) = 0$, und der Punkt *c* rückt in die Unendlichkeit.

Wir denken uns nunmehr eine durch parallele und senkrecht zum Niveau stehende Ebenen begrenzte Elementarscheibe (Fig. 20) ganz eingetaucht. Ist dann wieder die Dicke derselben $= b$, dann ist für ein Flächenelement $b \,.\, dl$ in der Tiefe y_1 die verticale Componente des Normaldruckes: $(\gamma = 1)$

$$dp \sin \alpha = y_1 \, b \, dl \sin \alpha = y_1 \, b \, dx.$$

Wir können nun, da die Beziehung $y = f(x)$ die negativen Werthe von selbst einführt, unserm eben gefundenen Gesetze folgend, rund herum integriren und erhalten:

$$\eta_1 = \left(\frac{\int y_1^2 \, dx}{\int y_1 \, dx} \right)_{y_1 = T_0 - a}^{y_1 = T_0 + b}$$

Beziehen wir nun noch die Ordinaten auf eine durch den Tangirungspunkt der Verticalen an die Curve gelegte X-Achse, so ist

$$y_1 = T_0 - y,$$

mithin

$$\eta_1 = \left(\frac{\int (T_0 - y)^2 \, dx}{\int (T_0 - y) \, dx} \right)_{y = -b}^{y = +a}$$

oder

$$\eta_1 = \left(\frac{\int T_0^2 \, dx - \int (2 T_0 y - y^2) \, dx}{\int T_0 \, dx - \int y \, dx} \right)_{y = -b}^{y = +a}$$

$$\eta_1 = \frac{\int_{x=o}^{x=o} T_0^2 \, dx - \int_{y=-b}^{y=+a} (2 T_0 y - y^2) \, dx}{\int_{x=o}^{x=o} T_0 \, dx - \int_{y=-b}^{y=+a} y \, dx}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{\int (2 T_0 y - y^2) \, dx}{\int y \, dx} \right)_{y=-b}^{y=a}$$

Um nun die Lage des Deplacementsschwerpunktes zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Lage der Schwerpunkte der beiden durch die X-Achse getrennten Hälften und combiniren die so erhaltenen Werthe nach dem Momentengesetz.

Bezeichnen wir daher den Abstand des Schwerpunktes der obern Hälfte vom Niveau mit η', so ist:

$$\eta' = \left(\frac{\int y\,dx\,(T_0 - \frac{y}{2})}{\int y\,dx}\right)_o^{+a}$$

und das Volumen selbst der im Nenner stehende Ausdruck.

Ebenso ist für die untere Hälfte

$$\eta'' = \left(\frac{\int y\,dx\,(T_0 - \frac{y}{2})}{\int y\,dx}\right)_{-b}^{o}$$

Nunmehr ist der Abstand des Schwerpunktes der Summe dieser beiden Volumina: (vom Niveau)

$$\eta = \frac{\left(\int y\,dx\,(T_0 - \frac{y}{2})\right)_o^{+a} + \left(\int y\,dx\,(T_0 - \frac{y}{2})\right)_{-b}^{o}}{\int_o^{+a} y\,dx + \int_{-b}^{o} y\,dx}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{\int y\,(T_0 - \frac{y}{2})\,dx}{\int y\,dx}\right)_{-b}^{+a}$$

oder endlich

$$\eta = {}^1/_2\left(\frac{\int (2y\,T_0 - y^2)\,dx}{\int y\,dx}\right)_{-b}^{+a}$$

also:

$$\eta_1 = 2\,\eta$$

Wir können daher folgenden, ganz allgemein gültigen Satz aussprechen:

Der Angriffspunkt des Auftriebes eines beliebig ein- oder untergetauchten Körpers liegt in der doppelten Tiefe des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit.

Hat der untergetauchte Körper eine einfache Form, so können wir auf elementarem Wege zum selben Ziel gelangen:

Denken wir uns (Fig. 21) ein rechteckiges Parallelepipedum mit der oberen horizontalen Fläche F in der Tiefe t unter dem Niveau befindlich, so ist

1) der von oben nach unten wirkende Druck

$$P_1 = F\gamma t$$

und die Tiefe seines Angriffspunktes

$$\eta_1 = t;$$

2) der von unten nach oben wirkende Druck

$$P_2 = F\gamma\ T$$

und die Tiefe seines Angriffspunktes

$$\eta_2 = T;$$

Mithin ist der Auftrieb:

$$P = P_2 - P_1 = F\gamma\,(T - t)$$

also gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge; die Lage des Angriffspunktes berechnet sich zu

$$\eta = \frac{P_2\,\eta_2 - P_1\,\eta_1}{P_2 - P_1} = h$$

$$\eta = \frac{F\gamma\,T^2 - F\gamma\,t^2}{F\gamma\,(T-t)} = \frac{T^2 - t^2}{T - t}$$

$$\eta = T + t.$$

Nach unserm allgemeinen Grundsatz würden wir gefunden haben:

Die Tiefe des Schwerpunktes $\eta_1 = \frac{T+t}{2}$, daher die Tiefe des Angriffspunktes des Auftriebes

$$\eta = T + t.$$

Lassen wir nun den Körper auf- und absteigen, so finden wir folgenden eigenthümlichen Vorgang:

Befindet sich die Oberfläche im Niveau, so ist in der allgemeinen Beziehung

$$\eta = T + t$$

$t = o$, also (Fig. 22)

$$\eta_0 = T;$$

d. h. der Auftrieb greift für diese Lage am Boden an. Sobald nunmehr der Körper gesenkt wird, geht der Angriffspunkt des Auftriebes aus dem Boden heraus, dem oben angegebenen allgemeinen Gesetz ($\eta = T + t$) folgend. Da er nach diesem immer den Abstand $T + t$ vom Niveau, also

$$(T + t) - T = t$$

vom Boden beibehält, so können wir für jedes mit horizontalen Endflächen versehene untergetauchte Prisma den Satz aufstellen, dass der Angriffspunkt des Auftriebes sich so weit unter der unteren Fläche befindet, wie die obere Fläche desselben vom Niveau.

Sinkt der Körper in unendliche Tiefe, so bleibt zwar der Unterschied der alsdann unendlich grossen Drucke P_1 und P_2 als das Gewicht der verdrängten Wassermenge bestehen, der Angriffspunkt des Auftriebes ist aber ebenfalls unendlich weit vom Boden des Prisma's entfernt. —

Hat ein schwimmender Körper eine solche Form, dass auch ein hydrostatischer Abtrieb eintritt, so bleibt, da unser Gesetz für alle Formen und Fälle abgeleitet ist, dasselbe auch hier bestehen. Demnach liegt der Angriffspunkt des Auftriebes bei einem Aräometer (Fig. 23) in a, wenn der Schwerpunkt desselben in s liegt.

Interessant sind noch die Wanderungen, welche die beiden Punkte: Angriffspunkt des Auftriebes und Deplacementsschwerpunkt, unternehmen, wenn man unter Beibehaltung eines bestimmten Gesetzes die Körperform ändert.

Dieselbe bestehe z. B. (Fig. 24—29) aus einem Cylinder mit parabolischem Boden. Ist die Tiefe der Eintauchung für den Ersteren $= a$, die Höhe des Bodens $= b$, (der Radius des

Cylinders $=r$), dann berechnet sich allgemein die Tiefe des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeitsmenge zu

$$s = \frac{a^2 - ab + \frac{b}{3}}{2a - b}$$

Setzen wir nun der Reihe nach

$$b = a;\ = \frac{a}{2};\ = o;\ = -\frac{a}{2};\ = -a,$$

so wird

$$s = \frac{a}{3};\ = \frac{7}{18}a;\ = \frac{a}{2};\ = \frac{19}{30}a;\ = \frac{7}{9}a,$$

und daher

$$\eta = \frac{2}{3}a;\ = \frac{7}{9}a;\ = a;\ = \frac{19}{15}a;\ = \frac{14}{9}a.$$

Die bezüglichen Figuren zeigen, dass der Angriffspunkt des Auftriebes ganz ähnlich wie der Schwerpunkt, je nach der Körperform innerhalb des Körpers oder ausserhalb desselben, fallen kann.

Thesen.

I.

Während die meisten Aufgaben der Statik ohne Annahme eines bestimmten Angriffspunktes der Kräfte zu lösen sind, existirt eine Reihe von Fällen, in denen den wirkenden Kräften ganz bestimmte Angriffspunkte zugewiesen werden müssen. Die Lösung derartiger Aufgaben muss nothwendig die Angabe eines bestimmten *Angriffspunktes der Resultante* in sich schliessen.

II.

Die meisten Autoren unserer heutigen Literatur über Hydrostatik weisen dem hydrostatischen Auftrieb einen bestimmten Angriffspunkt zu und verlegen denselben nach dem *Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.*

III.

Es existirt *kein mathematischer Beweis* für die Annahme, dass der Angriffspunkt des Auftriebes im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, Deplacementsschwerpunkt, liege.

IV.

Der Angriffspunkt des Auftriebes, oder speciell der Punkt, welcher zur Resultante sämmtlicher nach oben wirkenden Kräfte in derselben Beziehung steht, wie die Angriffspunkte dieser

Kräfte zu ihnen selbst, liegt für schwimmende Körper in der *doppelten* Tiefe des Deplacementsschwerpunktes.

V.

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Abtriebes untergetauchter Körper als der Resultante aller von *oben nach unten* wirkenden hydrostatischen Pressungen liegt senkrecht *über* dem Deplacementsschwerpunkt und in der *doppelten* Tiefe des Schwerpunktes der *pressenden Flüssigkeitssäule.*

VI.

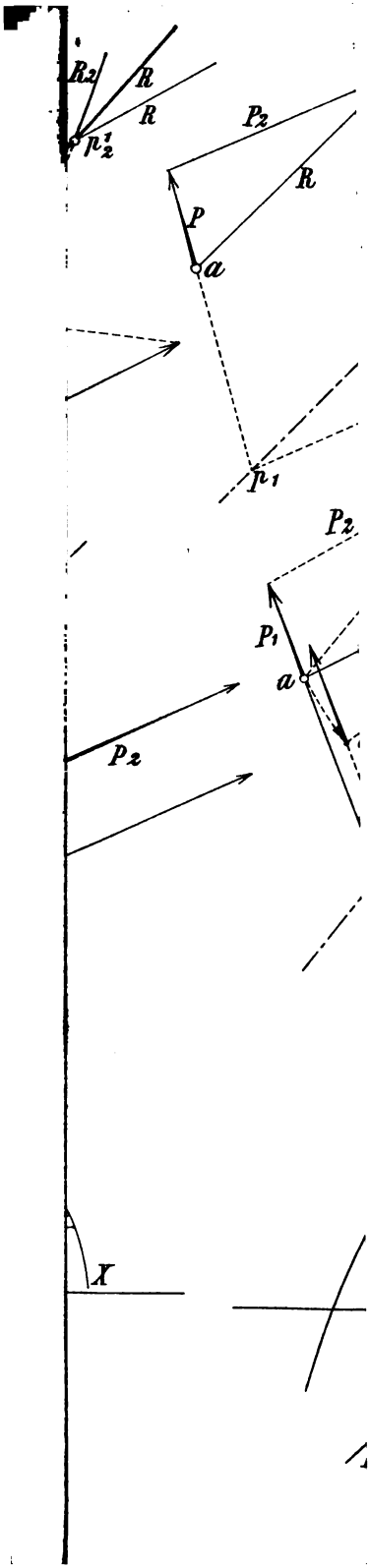
Der *Angriffspunkt des Auftriebes* eines beliebigen in einer Flüssigkeit schwimmenden oder untergetauchten Körpers als der Resultante sämmtlicher auf denselben wirkenden verticalen Pressungen *liegt senkrecht unter dem Deplacementsschwerpunkt und in der doppelten Tiefe desselben.*

Hermann Hädicke.

Die vollkommen selbstständige Ausführung der vorstehenden Arbeit (S. 1—60) versichert an Eides Statt

HAGEN i. W., im August 1880.

Hermann Hädicke.
Lehrer an der Kgl. Fachschule zu Hagen.


R2
R
R
n'2
P2
R
P
a
n1
P2
P1
a
P2
X